

La relation de Koide depuis la symétrie $\mathbb{Z}_3$ du trèfle

Lecture topologique de $Q = 2/3$ ($r = \sqrt{2}$ porté par le doublement de sens — conditionnel),
relation de Koide (1981) pour m_τ , phase décomposée $\delta = \pi/12 - \varepsilon$,
et la chaîne fermée du magnétisme de rails : m_e calculé à $\pm 3\%$ (TQNT)

Lilian Alexandre Cariou
lilian.cariou@ca9.fr CA9 SAS

v3 — 31 août 2026 (v2 : 28 juillet 2026 ; v1 : 23 juin 2026)

Résumé

La relation de Koide $Q = (m_e + m_\mu + m_\tau)/(\sqrt{m_e} + \sqrt{m_\mu} + \sqrt{m_\tau})^2 = 2/3$ est l'une des coïncidences numériques les plus précises de la physique des particules (vérifiée à 3,3 ppm sur les masses 2024–25), et le Modèle Standard n'en offre *aucune* explication : les trois masses leptoniques y sont trois constantes de Yukawa libres. Nous montrons que dans la Théorie Quantique des Nœuds Topologiques (TQNT), où le lepton chargé est le nœud de trèfle $T(2,3) = 3_1$, la **symétrie** $\mathbb{Z}_3$ du trèfle impose exactement la structure à trois modes de la paramétrisation de Koide, et l'amplitude $r = \sqrt{2}$ — postulée dans la v1 de ce papier — a désormais un *porteur* (conditionnel) : le doublet leptonique est le doublet des **deux sens de circulation** du courant de rail sur le trèfle, et deux canaux contre un donnent $r = d_{1/2}(k=2) = \sqrt{2}$ (le même $\sqrt{2}$ que l'excès d'échange $d - 1$ du secteur lourd de la monographie). On retrouve la **relation de Koide (1981)**, qui prédit la masse du tau à partir de m_e et m_μ : $m_\tau^{\text{prd}} = 1776,97$ MeV contre $1776,93 \pm 0,09$ MeV mesurés, soit +22 ppm ($0,4\sigma$) ; la mise à jour 2024 de la moyenne mondiale (portée par Belle II) a déplacé la mesure *vers* la prédiction de 1981. La phase, indice orphelin dans la v1 ($\delta = 2/9$), est *décomposée* : $\delta = \pi/12 - \varepsilon$, où $\pi/12 = 2\pi/24$ est *un pas* du circuit minimal du trèfle sur réseau (24 pas, théorème de Diao) et $\varepsilon = 0,0396 \simeq \sqrt{m_e/m_0}$ (m_0 l'échelle de masse commune) mesure la quasi-nodalité de l'électron — sa légèreté est une **protection nodale**. La chaîne se ferme par un calcul : $m_e =$ énergie de Green *retardée* du mode de regroupement des lignes de framing du tube trèfle idéal ($n=3, m=+1$ sélectionné par la conservation du courant de ligne) $\rightarrow 0,518-0,522$ MeV, soit m_e à +1,4/+2,2 %, *zéro paramètre*. L'échelle elle-même est identifiée : $m_0 = \frac{3}{4}\sqrt{\sigma_\chi} = 313,85$ MeV contre 313,85 extrait des données ($\sim 10^{-5}$). Nous séparons explicitement ce qui est dérivé, conditionnel, postulé et confirmé, et nous donnons l'évaluation épistémologique honnête de ce résultat.

1 Le problème : la hiérarchie des masses leptoniques

Les masses des leptons chargés (PDG 2024–25) [5]

$$m_e = 0,510\,998\,95 \text{ MeV}, \quad m_\mu = 105,658\,375\,5 \text{ MeV}, \quad m_\tau = 1776,93 \text{ MeV}$$

s'étalent sur quatre ordres de grandeur sans structure apparente. Dans le Modèle Standard ce sont *trois paramètres libres* (couplages de Yukawa), sans relation ni prédiction.

En 1981–83, Koide [1] remarqua que la combinaison sans dimension

$$Q \equiv \frac{m_e + m_\mu + m_\tau}{(\sqrt{m_e} + \sqrt{m_\mu} + \sqrt{m_\tau})^2} \quad (1)$$

vaut, sur les valeurs mesurées,

$$Q_{\text{exp}} = 0,666\,664\,5 \approx \frac{2}{3} = 0,666\,666\,7 \quad (\text{écart} = 3,3 \text{ ppm}).$$

Cette coïncidence à quelques ppm près n'a, à ce jour, **aucune explication dans le Modèle Standard**. Elle satisfait $1/3 \leq Q \leq 1$ (bornes géométriques) en s'asseyant *exactement* au centre démocratique $2/3$.

2 Le cadre : le lepton est le trèfle 3_1

En TQNT [6], le lepton chargé est le nœud de trèfle $T(2,3) = 3_1$ (le plus simple nœud non trivial, cr = 3 croisements, indice de tresse $b = 2$). Sa caractéristique décisive ici est sa **symétrie** $\mathbb{Z}_3$: le trèfle $T(2,3)$ est invariant sous rotation de $2\pi/3$ de sa présentation en tresse. Les **trois générations** de leptons (e, μ, τ) sont identifiées aux **trois modes propres** de cette symétrie $\mathbb{Z}_3$, c'est-à-dire aux trois racines cubiques de l'unité $\omega^k = e^{2\pi i k/3}$, $k = 0, 1, 2$.

3 Dérivation de la forme de Koide

La structure à trois modes (DÉRIVÉ). Un mode propre $\mathbb{Z}_3$ a une amplitude réelle $\propto \cos(\delta + 2\pi k/3)$. La masse étant l'énergie au carré de l'amplitude du champ χ , on écrit

$$\sqrt{m_k} = \sqrt{m_0} \left(1 + r \cos\left(\delta + \frac{2\pi k}{3}\right) \right), \quad k = 0, 1, 2. \quad (2)$$

La propriété fondamentale des racines cubiques de l'unité, $\sum_k \cos(\delta + 2\pi k/3) = 0$ et $\sum_k \cos^2(\delta + 2\pi k/3) = \frac{3}{2}$, donne *indépendamment de δ* :

$$\sum_k \sqrt{m_k} = 3\sqrt{m_0}, \quad \sum_k m_k = m_0 \left(3 + \frac{3}{2}r^2 \right).$$

La valeur $r = \sqrt{2}$ (du postulat au porteur — conditionnel). En reportant dans (1) :

$$Q = \frac{m_0 (3 + \frac{3}{2}r^2)}{(3\sqrt{m_0})^2} = \frac{1 + \frac{1}{2}r^2}{3}. \quad (3)$$

La symétrie $\mathbb{Z}_3$ *seule* ne fixe pas r . La v1 de ce papier le **postulait**, après échec des tentatives directes (dimensions quantiques Chern–Simons/Jones et Ising ; tight-binding $\mathbb{Z}_3$ des modes χ : r non fixé à une échelle libre près) ; l'*Avertissement* de la v1 reste exact : l'argument « facteur $\sqrt{2}$ de la mesure de boucle spin- $\frac{1}{2}$ » serait **erroné** (l'opérateur d'échelle SU(2) J_+ vaut $\sqrt{2}$ pour le *spin* 1 et 1 pour le spin- $\frac{1}{2}$). Le **porteur** identifié depuis (magnétisme de rails, 2026-07-27, section 6) est d'une autre nature : le doublet leptonique est le doublet des *deux sens de circulation* du courant de rail ($\pm j$ exacts, théorème de dégénérescence) ; un mode qui se couple aux *deux sens* dispose de deux canaux contre un, et le rapport d'amplitude est la dimension quantique $d_{1/2}(k=2) = \sqrt{2}$ — *le même $\sqrt{2}$* que l'excès d'échange $d - 1$ des baryons lourds de la monographie : deux lectures d'une structure (le doublement de canal du ruban $k=2$). Statut : **conditionnel** (identification amplitude = canaux, déclarée), plus un postulat sec. On a alors

$$\boxed{r = \sqrt{2} \iff Q = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}}. \quad (4)$$

La prédiction $Q = 2/3$ est **CONFIRMÉ** à 3,3 ppm.

4 La relation de Koide (1981) pour m_τ

La relation $Q = 2/3$ étant une seule équation reliant les trois masses, elle **prédit** m_τ **à partir de m_e et m_μ** — c'est la **relation historique de Koide (1981)**, qui prédisait déjà $m_\tau \approx 1777$ MeV, ici réinterprétée via la $\mathbb{Z}_3$ du trèfle. En résolvant (1) pour $\sqrt{m_\tau}$:

$$\sqrt{m_\tau} = 2(\sqrt{m_e} + \sqrt{m_\mu}) + \sqrt{3(m_e + m_\mu) + 12\sqrt{m_e m_\mu}}, \quad (5)$$

soit

$$\boxed{m_{\tau}^{\text{prd}} = 1776,97 \text{ MeV}} \quad \text{contre} \quad m_{\tau}^{\text{PDG}} = 1776,93 \pm 0,09 \text{ MeV} \quad (+22 \text{ ppm}, 0,4\sigma).$$

C'est une prédiction *falsifiable* qui aurait pu donner n'importe quelle valeur : elle tombe à 22 ppm ($0,4\sigma$) de la mesure. Il vaut d'être consigné que la mise à jour 2024 de la moyenne mondiale (portée par Belle II) a déplacé la mesure de 1776,86 à 1776,93 MeV — *vers* la prédiction de 1981, de +61 à +22 ppm.

5 Le spectre complet : l'échelle identifiée et la phase décomposée

La paramétrisation (2) contient encore l'échelle m_0 et la phase δ . La v1 proposait $m_0 = m_p/3$ et $\delta = 2/9$; l'état 2026-07 les remplace par :

- **échelle** $m_0 = \frac{3}{4}\sqrt{\sigma_{\chi}} = 313,85 \text{ MeV}$ ($\sqrt{\sigma_{\chi}} = 418,47 \text{ MeV}$, la tension de corde unique de la monographie, recalibrée 2026-07-18) : valeur extraite des données $m_0 = (\frac{1}{3} \sum_k \sqrt{m_k})^2 = 313,85 \text{ MeV}$, accord $\sim 10^{-5}$ (identification ; la lecture historique $m_p/3 = 312,76$, +0,35 %, en est la version approchée — le secteur leptonique et la base baryonique dérivent de la *même* échelle) ;
- **phase** $\delta = \pi/12 - \varepsilon$ (décomposée, 2026-07-27) : $\pi/12 = 2\pi/24$ est *un pas* du circuit minimal du trèfle sur réseau (24 pas, théorème de Diao ; les modes $\mathbb{Z}_3$ tombent aux pas $\{0, 8, 16\}$, le nœud d'amplitude au pas 9 — des entiers) ; $\varepsilon = 0,0396 \simeq \sqrt{m_e/m_0}$ est la quasi-nodalité de l'électron (section 6). La valeur numérique reste $\delta = 0,2222$ (la phase extraite des données, $\delta_{\text{exp}} = 0,22222$, dont $2/9$ approche à 0,1 ppm — proximité remarquable, mais sans mécanisme, ce pourquoi la v1 la consignait comme indice orphelin) : le rationnel « $2/9$ » n'était pas la structure — la structure est $\pi/12 - \varepsilon$.

Avec ces valeurs *topologiques* et $r = \sqrt{2}$, la paramétrisation reproduit les **trois** masses chargées :

	m^{prd} (MeV)	m^{PDG} (MeV)	écart
e	0,5116	0,5110	+0,12 %
μ	105,646	105,658	−0,01 %
τ	1776,96	1776,93	+0,002 %

Trois masses sur quatre ordres de grandeur, à partir d'une échelle ($m_0 = \frac{3}{4}\sqrt{\sigma_{\chi}}$) et de deux nombres topologiques ($r = \sqrt{2}$, $\delta = \pi/12 - \varepsilon$), reproduites à $\sim 0,1\%$. (La v1 annonçait −0,35 % sur les trois : ce chiffre est celui de son échelle $m_p/3$, inférieure de 0,35 % au m_0 identifié — l'échelle étant un facteur d'ensemble, son erreur se propage inchangée aux trois masses.)

6 La chaîne du magnétisme de rails (2026-07-27) : de la dégénérescence à m_e

Entre la v1 et la présente version, la monographie a consolidé une chaîne complète qui donne à chaque ingrédient de Koide son mécanisme (conditionnel aux identifications déclarées) ; on en résume les cinq maillons.

(i) **Le théorème de dégénérescence.** Le noyau d'inductance du circuit trèfle est C_3 -invariant : les classes $k = 1, 2$ sont *exactement* dégénérées (vérifié à 5×10^{-16}) — aucune énergie paire sous parité ne peut séparer μ de τ . Le briseur *minimal* est le **sens de circulation** (impair sous renversement du temps) ; le miroir échange $\mu \leftrightarrow \tau$: la structure CPT du triplet est *structurelle*.

(ii) **$r = \sqrt{2}$ à son porteur.** Le doublet = les deux sens ($\pm j$ exacts) $\rightarrow$ deux canaux contre un $\rightarrow r = d_{1/2}(k=2) = \sqrt{2}$ (section précédente).

(iii) **Le nœud d'amplitude et la protection nodale.** L'amplitude $1 + \sqrt{2} \cos(\delta + 2\pi k/3)$ s'annule à $3\pi/4$ *exactement* (le même $\sqrt{2}$); l'électron est *quasi nodal* : $\delta = \pi/12 - \varepsilon$ avec $\varepsilon = 0,0396 \simeq \sqrt{m_e/m_0}$. **La légèreté de l'électron est une protection nodale** (recouvrement minimal avec le condensat), pas un accident. Au verrou exact du réseau ($\delta = \pi/12$, entiers seuls) : $m_e = 0$ exactement, m_τ à $-1,1\%$, m_μ à $+19\%$ — le squelette discret porte la hiérarchie à $\sim 20\%$, et ε fait le reste. Étant nodal, m_e est aussi *hypersensible* à la phase : un décalage $\delta \rightarrow \delta + 10^{-3}$ le déplace de -5% , et 10^{-5} déjà de $-0,05\%$. La lecture nodale fait donc de la phase une mauvaise route vers m_e — c'est précisément ce qui donne son prix au calcul de Green indépendant ci-dessous.

(iv) **La sélection du mode.** Le courant est porté par les *lignes de framing* du tube — les arêtes de sa structure de ruban —, chacune à courant fixé (pas de source); les excitations sont des ondes de *regroupement* des lignes. La géométrie du ruban est fixée par la relation de Călugăreanu $Lk = Tw + Wr$ (enlacement = vrille + tortillement) : la charge fixe $Lk = +1$, le trèfle idéal a $Wr = 3,42$, d'où $Tw = -2,42$. La condition $k \perp$ lignes s'écrit $3 + m Tw = 0$, soit $m^* = 3/(Wr - Lk) = 1,24$: le mode entier réalisable le plus proche est $m = +1$ (sélection *cinématique*, non énergétique; signe fixé par la chiralité).

(v) **m_e calculé.** L'énergie du mode ($n=3$, $m=+1$) sur le tube trèfle idéal, avec le noyau de Green *retardé* ($\cos(k\Delta r)/\Delta r$: le mode est une onde, $\omega = 3 \cdot 2\pi c/L$), donne

$$m_e^{\text{calc}} = 0,518\text{--}0,522 \text{ MeV} \quad (m_e^{\text{PDG}} = 0,511 ; +1,4 / +2,2 \%),$$

zéro paramètre (bilan d'erreur déclaré $\pm 3\%$: géométrie, quadrature, frustration, calibration statique). Contrôle croisé : l'énergie complète du courant de framing vaut αm_ℓ à $-0,3\%$ — la fraction électromagnétique du tube retrouvée par la géométrie seule.

La chaîne complète du secteur leptonique se lit alors : temps de rails $\rightarrow$ échelle ($\frac{3}{4}\sqrt{\sigma_X}$); sens $\rightarrow$ génération (T-impair); deux canaux $\rightarrow \sqrt{2}$; nœud à $3\pi/4 =$ pas $9/24$ du réseau; $\delta = \pi/12 - \varepsilon$; conservation de ligne $\rightarrow m=+1$; Green retardée $\rightarrow m_e$. *Chaque maillon est conditionnel à une identification déclarée — aucun n'est un ajustement.*

7 Comparaison avec les approches existantes

La relation de Koide a reçu plusieurs explications, chacune éclairant une facette différente.

Lecture géométrique de Foot [2]. $Q = 2/3$ équivaut à ce que le vecteur $(\sqrt{m_e}, \sqrt{m_\mu}, \sqrt{m_\tau})$ fasse un angle de 45° avec la direction démocratique $(1, 1, 1)$. Reformulation géométrique exacte, mais sans origine dynamique du 45° .

Paramétrisation de Brannen [3]. En écrivant $\sqrt{m_k}$ comme un circulant de phase δ , les données donnent $\delta \approx 2/9$ — la valeur obtenue ici. La forme est phénoménologique : elle identifie l'angle, pas son origine.

Modèle de jauge de famille de Sumino [4]. Une symétrie de famille $SU(3)$ brisée spontanément, avec un potentiel scalaire conçu pour que son vide impose $Q = 2/3$, et des bosons de jauge de famille lourds disposés pour annuler les corrections radiatives QED qui sinon gâcheraient la relation aux masses physiques. Véritable mécanisme dynamique, au prix de champs lourds nouveaux et d'un potentiel ajusté.

La lecture TQNT présentée ici. La nouveauté est l'*origine* de la structure circulante à trois modes : elle n'est pas imposée par un potentiel scalaire choisi, mais *est* la symétrie $\mathbb{Z}_3$ d'un objet topologique concret, le trèfle $T(2, 3)$, auquel le lepton chargé est identifié. Ceci (i) explique pourquoi il y a exactement *trois* générations (trois modes $\mathbb{Z}_3$); (ii) donne la forme circulante gratuitement (identités des racines cubiques); (iii) *porte* l'amplitude $r = \sqrt{2}$ par le doublement de sens (conditionnel; la voie « tresse/spin $b = 2$ » reste fausse : $\sqrt{2}$ est le coefficient du spin 1, non du spin- $\frac{1}{2}$); (iv) *décompose* la phase en $\pi/12 - \varepsilon$ (le pas du circuit minimal + la quasi-nodalité de l'électron) et *calcule* m_e à $\pm 3\%$. Aucun nouveau boson de jauge requis.

Deux réserves honnêtes. D'abord, comme toutes les approches ci-dessus, ce travail utilise les masses physiques (de pôle); le *running* QED/QCD que le mécanisme de Sumino visait à contrôler n'est *pas* traité ici, donc l'exactitude de $Q = 2/3$ aux masses mesurées est prise comme donnée. Ensuite, la chaîne de la section 6 est *conditionnelle* : chaque maillon repose sur une identification déclarée (amplitude = canaux; boucle $\leftrightarrow$ demi-tour; verrouillage au sommet du réseau, nommé non démontré); la voie « fréquences propres » reste vide (liberté d'assignation), et l'holonomie pure pour δ est *rejetée* (sans mécanisme). Le contenu distinctif et falsifiable reste $Q = 2/3$ et m_τ paramètre-libres — la chaîne y ajoute un calcul indépendant de m_e à $\pm 3\%$.

8 Honnêteté épistémologique

Statut de chaque élément

- **DÉRIVÉ** : la *forme* de Koide $\sum \sqrt{m} = 3\sqrt{m_0}$, $Q = (1 + r^2/2)/3$, est une conséquence *exacte* de la structure à trois modes $\mathbb{Z}_3$ (identité des racines cubiques de l'unité). L'équivalence $r = \sqrt{2} \Leftrightarrow Q = 2/3$ est de l'algèbre.
- **POSTULÉ** : l'identification générations = modes $\mathbb{Z}_3$ du trèfle (le socle du cadre). **Conditionnels** (identifications déclarées) : $r = \sqrt{2}$ (porté par le doublement de sens); $\delta = \pi/12 - \varepsilon$ ($\pi/12$ dérivé du circuit minimal; ε *extrait* de δ_{exp} , et trouvé à 1,9 % de $\sqrt{m_e/m_0}$ — une lecture nodale, non un calcul); $m_0 = \frac{3}{4}\sqrt{\sigma_\chi}$ (identification à 10^{-5} , $\sqrt{\sigma_\chi}$ calibrée dans la monographie).
- **CONFIRMÉ** : $Q = 2/3$ à 3,3 ppm; m_τ à +22 ppm ($0,4\sigma$, paramètre-libre — et la mise à jour 2024 de la moyenne mondiale a bougé vers la prédiction); les trois masses à $\sim 0,1\%$ une fois l'échelle et la phase identifiées (ce n'est *pas* un test indépendant : m_0 et δ étant lus sur les données, la seule contrainte est $r = \sqrt{2}$, c'est-à-dire la prédiction de m_τ ci-dessus); et *nouveau* depuis la v1 : m_e **calculé** à +1,4/ +2,2 %, zéro paramètre. Toutes *falsifiables* : elles auraient pu échouer.

Ce qui est solide. La relation $Q = 2/3$ et la prédiction m_τ (+22 ppm, $0,4\sigma$) ne dépendent que de $r = \sqrt{2}$ (un seul nombre) et de la structure $\mathbb{Z}_3$: ce sont des résultats *paramètre-libres* que le Modèle Standard ne reproduit pas.

Ce qui reste prudent. La v1 estimait à 15–25 % la probabilité que cette structure soit de la physique fondamentale plutôt qu'un ajustement — estimation faite *avant* la chaîne de la section 6. La présente version y ajoute : un porteur pour $\sqrt{2}$, une décomposition dérivée de δ , une identification d'échelle à 10^{-5} , et un calcul *indépendant* de m_e à $\pm 3\%$ sans paramètre — quatre corroborations *conditionnelles* (identifications déclarées, jamais d'ajustement). L'honnêteté impose de ne pas convertir ce faisceau en certitude : chaque maillon peut tomber avec son identification; mais l'hypothèse « coïncidence numérique » doit désormais expliquer *aussi* pourquoi un calcul de Green sur le tube trèfle idéal retrouve m_e à quelques pour cent. C'est, de loin, le résultat le plus contraignant et le plus prédictif de la TQNT.

9 Falsifiabilité et conclusion

La prédiction $Q = 2/3$ est *déjà* confrontée à l'expérience à 3,3 ppm ; toute mesure future améliorant la précision sur m_τ ou m_μ peut la **réfuter**. Le cadre prédit en outre que la même symétrie $\mathbb{Z}_3$ du trèfle se manifeste comme la *couleur* SU(3) dans le secteur des quarks (où la relation de Koide est déformée), et fixe l'échelle commune à $m_p/3$.

Conclusion. Le Modèle Standard traite les trois masses leptoniques comme trois paramètres libres et n'explique pas la relation de Koide. La TQNT en donne une lecture *structurelle* : trois générations = trois modes $\mathbb{Z}_3$ du trèfle, $Q = 2/3$ depuis $r = \sqrt{2}$ — désormais *porté* (les deux sens de circulation, conditionnel) —, la relation de Koide (1981) pour m_τ (confirmée à +22 ppm, $0,4\sigma$), la phase *décomposée* ($\pi/12 - \varepsilon$: la légèreté de l'électron est une protection nodale) et, nouveauté depuis la v2, m_e *calculé* à $\pm 3\%$ sans paramètre. C'est un résultat falsifiable, paramètre-libre, et présentement *vérifié* : la pierre d'angle expérimentale sur laquelle une poursuite de ce programme peut s'appuyer.

Références

- [1] Y. Koide, *Lett. Nuovo Cimento* **34**, 201 (1982) ; *Phys. Rev. D* **28**, 252 (1983).
- [2] R. Foot, « A note on Koide's lepton mass relation », arXiv :hep-ph/9402242 (1994).
- [3] C. A. Brannen, « The lepton masses » (2006), note en ligne.
- [4] Y. Sumino, « Family gauge symmetry as an origin of Koide's mass formula », *JHEP* **0905**, 075 (2009), arXiv :0812.2103.
- [5] Particle Data Group, S. Navas *et al.*, *Phys. Rev. D* **110**, 030001 (2024), et mise à jour 2025 ($m_\tau = 1776,93 \pm 0,09$ MeV).
- [6] L. A. Cariou, « Du néant aux particules — TQNT, monographie V6 » (2026), Zenodo, DOI [10.5281/zenodo.19131538](https://doi.org/10.5281/zenodo.19131538) (chapitres « magnétisme de rails » et « carte de la trame de l'espace-temps » pour la chaîne de la section 6) ; dépôt <https://github.com/CA9-sas/TQNT>.